Le distribuzioni di Pareto e Maxwell-Boltzmann a confronto

Coi simboli per me più abituali (vedi "Curva di Lorenz ed indice di Gini") la distribuzione di Pareto può essere posta nella forma seguente:

$N - n = C\varepsilon^{-\alpha}$ (1)

oppure:

$x = n/N = 1 - (C/N)\,\varepsilon^{-\alpha}$ (1')

dove:

- ε = energia posseduta da una molecola o reddito attribuibile ad un individuo
- n = numero di individui con reddito minore od uguale di ε
- N = numero totale di individui della società
- x = frazione della popolazione con reddito minore od uguale di ε
- α e C = costanti di Pareto

N.B.: Veramente Pareto usa, per le sue costanti, i simboli α e A; ho sostituito C ad A per evitare equivoci con la costante A di Maxwell, che ha un significato alquanto diverso.

Con una serie di passaggi matematici per cui, come al solito, rimando all'Appendice, si ottiene la curva di Lorenz corrispondente:

$y = 1 - (1 - x)^{1- 1/\alpha}$ (2)

ed il suo integrale:

$x + [\alpha/(2\alpha - 1)]\,(1 - x)^{(2\alpha - 1)/\alpha}$ (3)

calcolando il quale fra 0 ed 1 si ottiene il valore dell'area B, necessario per il calcolo del coefficiente di Gini; risulta:

$B = (\alpha - 1)/(2\alpha - 1)$

e poiché, in termini percentuali, il coefficiente di Gini è dato dalla:

$G = 100(1 - 2B)$

segue che detto coefficiente dipende dalla costante α di Pareto secondo la funzione:

$G = 100/(2\alpha - 1)$ (4)

G è tanto più piccolo, ossia la distribuzione è tanto più egualitaria, quanto più α è grande; in particolare si ha:
- per $\alpha = +\infty$, G = 0 e quindi la curva di Lorenz va a coincidere con la retta a 45 gradi che rappresenta la distribuzione perfettamente egualitaria.
- per $\alpha = 1$, G = 100 e la curva di Lorenz si riduce ad un impulso di Dirac in corrispondenza dell'ascissa x = 1; la diseguaglianza è massima.
- valori di α inferiori all'unità sono privi di senso (vedi Appendice)

E' particolarmente interessante il caso in cui $\alpha = 1{,}5$, che, guarda caso, è quello che Pareto riscontrò per l'Inghilterra (nel 1843) e che occupa una posizione all'incirca centrale fra quelli delle varie

situazioni da lui esaminate (i valori da lui trovati vanno da 1,35 a 1,68); ebbene in tal caso la (4) ci dà per il coefficiente G il valore centrale di 50 che, per di più, è anche quello corrispondente alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann, che sembra logico considerare come quella di massima probabilità (ossia di massima entropia).
Questo però non vuol dire che le due curve di Lorenz siano uguali; nella figura sono riportate, in rosso la curva corrispondente alla distribuzione di Pareto con $\alpha = 1,5$, in nero quella corrispondente alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann; si noterà che, pur dando luogo allo stesso valore del coefficiente di Gini, esse differiscono in misura abbastanza significativa; quella di Pareto rappresenta una situazione un po' più egualitaria in quanto dà luogo a redditi più elevati per il 70% più povero della popolazione e più bassi per il rimanente 30%.
A titolo di esempio è stata riportata in figura anche la curva del caso $\alpha = 1,35$ (il minimo fra i valori trovati da Pareto) il cui coefficiente di Gini è 58,8; quanto al massimo α trovato da Pareto, 1,68, esso dà luogo ad un coefficiente di Gini di 42.
Nel mettere a confronto le distribuzioni di Maxwell-Boltzmann e di Pareto non dobbiamo perdere di vista il fatto che esse hanno genesi e natura molto diverse.
Quella di Maxwell-Boltzmann deriva da un ragionamento matematico a priori che porta a determinare la situazione più probabile, ossia la situazione limite a cui perverrebbe la società (se è una società ciò di cui ci stiamo occupando) se fosse tenuta per un tempo sufficientemente lungo al riparo da fattori d'influenza non casuali; conseguentemente essa dà luogo ad una curva di Lorenz univoca e ad un unico valore di Gini che, non sorprendentemente, cade esattamente a metà della gamma dei valori possibili.
Pareto parte invece da una serie di dati statistici a sua disposizione per individuare la funzione matematica che ad essi meglio corrisponde; mi sembra una forzatura, da parte sua, parlare, come fa, di "legge naturale", poiché niente, mi sembra, ci vieta di pensare che esista qualche formula matematica, non ancora trovata, che si sposi ancora meglio ai dati statistici; del resto lo stesso Pareto ammette che la corrispondenza non è perfetta e fornisce poi una seconda formula che dovrebbe dar luogo ad un'approssimazione migliore, la quale però, a quanto mi risulta, non è mai stata usata sistematicamente né da lui né da altri ([1]); quella di Pareto, inoltre, non è una distribuzione unica ma una famiglia di infinite distribuzioni, ognuna corrispondente ad uno dei valori cheα può assumere fra 0 e $+\infty$, il ché è sufficiente a farci capire che nessuna di esse (salvo una al più) corrisponde ad un massimo probabilistico e che quindi tutte inglobano l'effetto di fattori non stocastici, probabilmente variabili in peso e segno in funzione di α, che non siamo in grado di precisare, ma che comunque intuiamo debbano essere collegati alla capacità umana di agire, più o meno consciamente, in funzione di un qualche fine; colle parole dello stesso Pareto: "*La tendance des revenus à se grouper suivant une certaine loi pourrait bien dépendre, en grande partie, de la nature même des hommes*." ([2])
Un'eccezione a quanto sopra si può eventualmente fare per il caso $\alpha = 1.5$, G = 50; dopo tutto gli scostamenti rispetto a Maxwell-Boltzmann potrebbero non essere così importanti, e apparirebbero ancor meno tali a livello di logaritmi, il livello a cui Pareto ha lavorato; questo non vuol dire, naturalmente, che la situazione concreta corrispondente (Inghilterra 1843) fosse esente da fattori d'influenza non stocastici; evidentemente dobbiamo pensare che tali fattori, pur massicciamente presenti, come in qualsiasi società umana di qualsiasi tempo, in quel caso si facessero equilibrio, in modo da dare un effetto complessivo all'incirca nullo.
Più in generale sembra logico pensare che un effetto di annullamento reciproco almeno parziale di questi fattori sia sempre presente, il ché aiuta a capire il fatto che i casi reali tendano a raggrupparsi (dai due lati) intorno alla situazione stocastica pura, rappresentata da Maxwell-Boltzmann e, in

[1] V.PARETO, *La courbe de la Répartition de la Richesse*, pag.3 e pag.6; occorre inoltre tener presente che questi scostamenti, che Pareto riconosce, sono a livello di logaritmi, il ché significa che si presenterebbero amplificati nella realtà.
[2] V.PARETO, *La courbe de la Répartition de la Richesse*, pag.7.

definitiva, dal valore G = 50; questo è vero per i casi studiati da Pareto, ma sembra abbastanza vero anche oggi (vedi "Curva di Lorenz ed indice di Gini"), salvo per gli scostamenti verso il basso relativamente importanti (G = 30÷40) dei paesi caratterizzati da un più forte "stato sociale" ([3]).
Anche Pareto si rendeva ben conto del fatto che l'azione politica può modificare in modo sostanziale la curva di distribuzione del reddito: "*J'ai indiqué moi-même à G.Sorel une objection que pourrait me faire un socialiste: ma courbe est une courbe valable pour la societé capitaliste*." ([4]). Qui egli è semmai, una volta tanto, troppo modesto, visto che, dopo tutto, come abbiamo già trovato, pur di assegnare ad α valori sufficientemente elevati, la sua curva può essere portata quanto vicina si vuole alla retta a 45 gradi che rappresenta il caso di perfetta uguaglianza.
E' chiaro che allontanarsi di molto dal massimo probabilistico, ossia entropico, rappresentato da G = 50, richiede un grosso sforzo, ma non sarebbe corretto parlare di impossibilità; dopo tutto si potrebbe vedere tutta la storia della civiltà umana come una continua lotta contro l'entropia, lotta coronata finora da notevoli successi; tuttavia, dal punto di vista pratico, è legittimo pensare che obbiettivi troppo ambiziosi, verso G troppo bassi, richiederebbero uno sforzo tale da riuscire alla lunga insopportabile; questo può essere un altro modo di vedere le esperienze comuniste del XX secolo.

Appendice

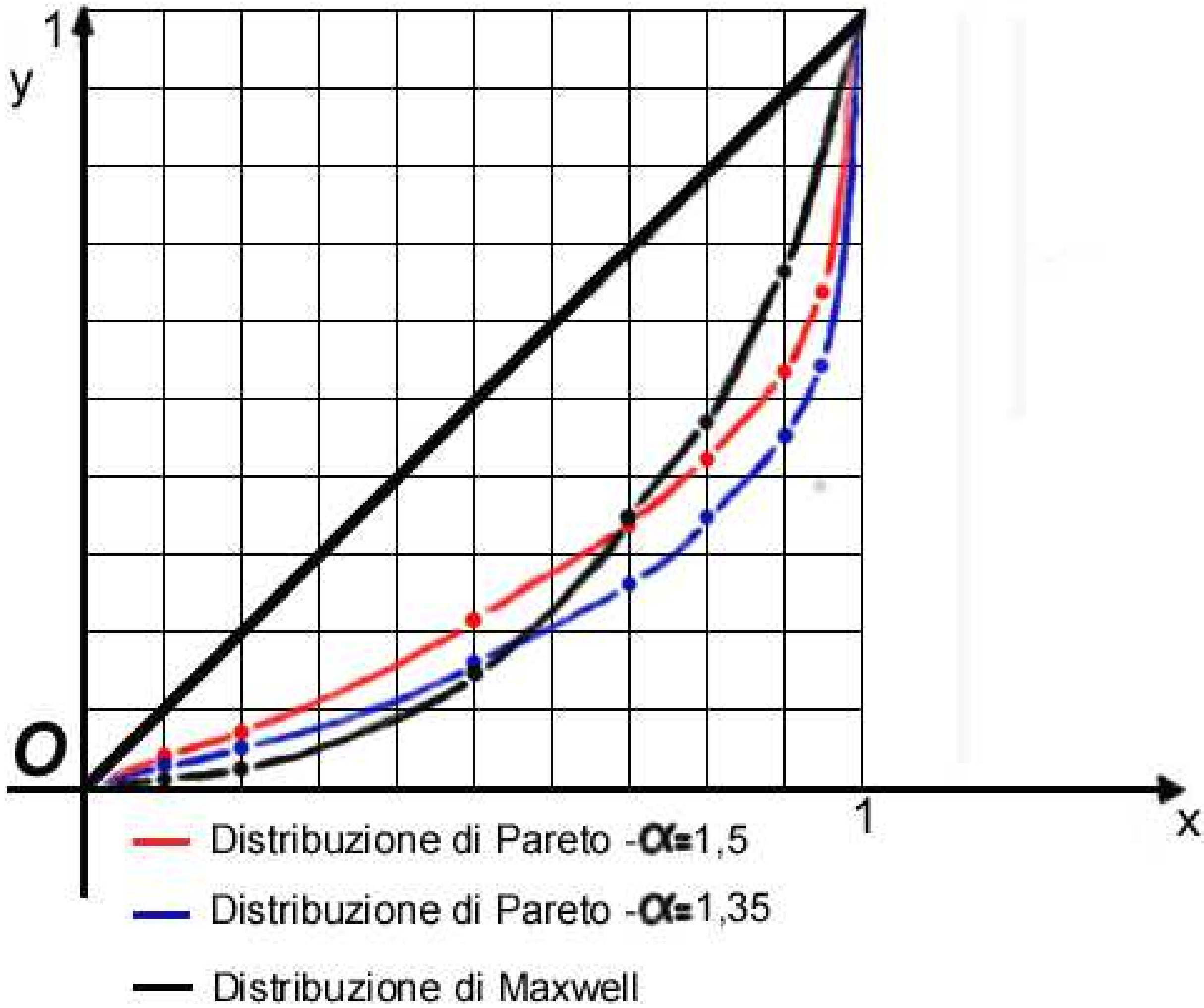
Partiamo dalla (1'):
$x = n/N = 1 - (C/N)\,\varepsilon^{-\alpha}$
e ricaviamo la funzione inversa:
$\varepsilon = \varepsilon(x) = (C/N)^{1/\alpha}(1 - x)^{-1/\alpha}$
L'energia, o il reddito, corrispondenti alla frazione x della popolazione è quindi data dal seguente integrale, preso fra 0 ed x:
$E(x) = \int \varepsilon(x)dx = (C/N)^{1/\alpha}[- (1 - 1/\alpha)^{-1}(1 - x)^{1 - 1/\alpha}]$ fra 0 ed x, ossia:
$E(x) = (C/N)^{1/\alpha}(1 - 1/\alpha)^{-1}[1 - (1 - x)^{1 - 1/\alpha}]$
Dividendo per l'energia totale E (o per il reddito totale) otteniamo evidentemente la frazione y della stessa che corrisponde alla frazione x della popolazione:
$y = E(x)/E = (1/E)(C/N)^{1/\alpha}(1 - 1/\alpha)^{-1}[1 - (1 - x)^{1 - 1/\alpha}]$
E' evidente che deve essere sempre $\alpha > 1$; infatti se così non fosse, l'esponente $1 - 1/\alpha$ sarebbe negativo e quindi, per x = 1, l'espressione precedente darebbe $y = -\infty$ il ché è evidentemente assurdo. A questa condizione ($\alpha > 1$) si ha:
- per x = 0 $\quad y = 0$
- per x = 1 $\quad y = (1/E)(C/N)^{1/\alpha}(1 - 1/\alpha)^{-1}$

Ma, d'altra parte, per x = 1 deve essere, evidentemente, y = 1, il ché implica che l'espressione $(1/E)(C/N)^{1/\alpha}(1 - 1/\alpha)^{-1}$ sia anch'essa uguale ad 1; in definitiva si ottiene la (2) del testo:
$y = [1 - (1 - x)^{1 - 1/\alpha}]$
ossia la curva di Lorenz corrispondente alla distribuzione di Pareto.

N.B: Tutti i risultati matematici sopra esposti si possono ritrovare anche su Wikipedia, sia pure con una formalizzazione ed una simbologia un po' diverse.

---

[3] Non sono però in possesso di dati che mi permettano di verificare se e quanto siano "paretiane" le relative curve di Lorenz.
[4] G.BUSINO, *Écrits sur la courbe de repartition de la richesse*, pag.XV.



Piero Zattoni,   Forlì 2010